

Programma svolto di MATEMATICA

Classe 4LC

A.S. 2023/2024

Docente: Prof. Andrea Luca Mandoli

Libro di testo: M. Bergamini, G. Barozzi, A. Trifone, *Lineamenti di matematica.azzurro*, volumi 3 e 4, Ed. Zanichelli.

1 Richiami e complementi di algebra

1.1 Disequazioni prodotto e disequazioni fratte

- (a) Disequazioni di grado superiore al primo risolubili mediante scomposizione in fattori (disequazioni prodotto). Costruzione del grafico dei segni.
- (b) Disequazioni frazionarie e relativo grafico dei segni.
- (c) Sistemi di disequazioni contenenti disequazioni fratte o disequazioni prodotto.

1.2 Equazioni e disequazioni di secondo grado

- (a) Ripasso sulle equazioni di secondo grado. Enunciato del teorema che lega i coefficienti di un trinomio di secondo grado alla somma e al prodotto delle sue radici reali (formule di Viète). Formula risolutiva ridotta per le equazioni di secondo grado complete. Scomposizione di un trinomio di secondo grado.
- (b) Ripasso sulle disequazioni di secondo grado: studio del segno di un trinomio di secondo grado, equazione associata, risoluzione grafica.
- (c) Equazioni fratte riconducibili ad equazioni di secondo grado.
- (d) Equazioni di grado superiore al secondo risolubili mediante la scomposizione in fattori.

2 Coniche

2.1 La parabola nel piano cartesiano

- (a) Definizione di parabola come luogo geometrico. Definizione di fuoco, direttrice, asse e vertice di una parabola. Proprietà focali di una parabola.
- (b) Parabola con vertice nell'origine degli assi cartesiani: determinazione dell'equazione assegnati fuoco e direttrice, coordinate del fuoco e del vertice in funzione di a , equazioni della direttrice e dell'asse. Relazione tra il segno del coefficiente a e la concavità della parabola.
- (c) Equazione generale di una parabola con asse parallelo all'asse y . Teorema relativo all'ascissa del vertice di una tale parabola (senza dimostrazione).
- (d) Disegno del grafico della parabola, determinando gli elementi fondamentali (come gli eventuali intersezioni con gli assi cartesiani e il vertice).

- (e) Determinazione dell'equazione della parabola (con asse verticale) passante per tre punti non allineati. Determinazione dell'equazione della parabola (con asse verticale) avente vertice in un punto assegnato e passante per un altro punto dato.
- (f) Posizioni reciproche tra retta e parabola. Sistemi di secondo grado del tipo retta-parabola e parabola-parabola. Condizione algebrica di tangenza tra retta e parabola. Rette tangenti condotte da un punto esterno.

2.2 Cenni sull'ellisse nel piano cartesiano

- (a) Definizione di ellisse come luogo geometrico. Definizione di: (semi)distanza focale, (semi)asse maggiore e (semi)asse minore. La misura dell'asse maggiore come costante nella definizione di ellisse.
- (b) L'equazione dell'ellisse nel piano cartesiano. Equazione di un'ellisse con centro nell'origine e fuochi sull'asse x . Relazione algebrica tra a , b e c . Coordinate dei vertici e dei fuochi.
- (c) Rappresentazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x assegnata l'equazione, dopo averne determinato le coordinate dei fuochi e dei vertici.
- (d) Definizione di eccentricità di un'ellisse. Cenni sull'eccentricità delle orbite dei pianeti del Sistema Solare.
- (e) L'ellisse con i fuochi sull'asse y : relazione tra a , b , c . Coordinate dei fuochi e dei vertici. Eccentricità. Formula dell'area racchiusa da un'ellisse.
- (f) Determinazione dell'equazione di un'ellisse assegnati il semiasse maggiore e l'eccentricità.

3 Goniometria e trigonometria

3.1 Goniometria ed equazioni goniometriche elementari

- (a) Introduzione alla Goniometria: proporzionalità diretta tra angolo al centro di una circonferenza e l'arco su cui esso insiste. Proporzionalità diretta tra archi e raggi. Misura degli angoli in radianti. Misura in radianti di alcuni angoli notevoli. Passaggio dalla misura in gradi decimali o sessagesimali ai radianti e viceversa.
- (b) Angoli orientati e angoli maggiori dell'angolo giro. Circonferenza goniometrica. Definizione di seno e coseno di un angolo. Segno di seno e coseno nei quattro quadranti. Limitatezza e periodicità di $\sin(\alpha)$ e di $\cos(\alpha)$. Prima relazione fondamentale della goniometria (con dimostrazione, usando il teorema di Pitagora e tramite l'equazione cartesiana della circonferenza goniometrica). Seno e coseno dei multipli di 90° .
- (c) Richiami sulle proprietà del triangolo rettangolo con angoli acuti di ampiezza 30° e 60° e su quelle del triangolo rettangolo isoscele. Applicazione alla determinazione del seno e del coseno degli angoli notevoli del primo quadrante (30° , 45° , 60°). Semplificazione di espressioni che coinvolgono seno e coseno di angoli notevoli (in gradi o in radianti).
- (d) La definizione geometrica di tangente goniometrica di un angolo. Osservazioni sul segno di $\tan(\alpha)$ e sulla sua non esistenza nei multipli dispari di 90° . Seconda relazione fondamentale della goniometria (dimostrazione solo nel caso di angoli acuti, via similitudine di triangoli). Applicazione alla determinazione della tangente degli angoli notevoli. Cenni sulla periodicità della tangente.
- (e) Significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta.

- (f) Angoli associati: determinazione di seno, coseno e tangente dell'opposto e del supplementare di un angolo assegnato.
- (g) Equazioni goniometriche elementari della forma $\sin(x) = k$, $\cos(x) = k$ e $\tan(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$.
- (h) Risoluzione di equazioni goniometriche riconducibili ad equazioni elementari mediante opportuni cambi di variabile.

3.2 Trigonometria

- (a) Primo e secondo teorema sui triangoli rettangoli (con dimostrazione). Applicazione alla risoluzione di triangoli rettangoli.
- (b) Applicazione del primo teorema sui triangoli rettangoli: area di un triangolo qualsiasi (con dimostrazione).

4 Introduzione alle funzioni

- (a) Definizione di funzione come legge di corrispondenza tra insiemi non vuoti. Definizione di dominio e codominio di una funzione. Definizione di immagine e di controimmagine di un elemento e di immagine di una funzione. Notazione funzionale.
- (b) Funzioni reali di variabile reale. Espressione analitica ed equazione di una funzione. Variabile dipendente ed indipendente. Definizione di dominio naturale di una funzione. Determinazione del dominio di funzioni polinomiali, razionali fratte, irrazionali e trigonometriche.
- (c) Calcolo di immagini e controimmagini usando l'espressione analitica di una funzione.
- (d) Definizione di grafico di una funzione. Determinazione del dominio e dell'immagine di una funzione a partire dal suo grafico. Immagini e controimmagini letti sul grafico di una funzione.
- (e) Determinazione delle (eventuali) intersezioni del grafico di una funzione con gli assi cartesiani, sia a partire dall'espressione analitica di una funzione, sia a partire dal suo grafico. Definizione di zero di una funzione.
- (f) Studio del segno di una funzione reale di variabile reale, dal punto di vista algebrico e grafico. Esempi di studio del segno di funzioni polinomiali e razionali fratte. Segno di potenze pari o dispari di polinomi qualsiasi.
- (g) Definizione di funzione iniettiva, suriettiva e biunivoca, noti dominio e codominio. Test grafici per capire se una funzione $f : A \rightarrow B$ è iniettiva o suriettiva, con A e B sottoinsiemi di \mathbb{R} .
- (h) Monotonia: definizione di funzione crescente e di funzione decrescente. Deduzione degli intervalli di monotonia di una funzione a partire dal suo grafico.

5 Esponenziali e logaritmi

- (a) Ricapitolazione sulle definizioni di potenze aventi come un esponente rispettivamente un numero naturale o intero relativo. Richiami sulle proprietà delle potenze.
- (b) Definizione di potenze ad esponente razionale (con dimostrazione della buona positura). Commenti sulla necessità di considerare basi positive. Cenni alla definizione di potenze con esponente reale: costruzione di 2^π come elemento separatore di classi contigue. Cenni alla completezza dell'insieme \mathbb{R} .
- (c) Funzioni esponenziali: grafici e principali proprietà (dominio, immagine, punto nodale, iniettività, monotonia, cenni sui limiti agli estremi del dominio) di $f(x) = a^x$, nei due casi $0 < a < 1$ e $a > 1$.
- (d) Equazioni esponenziali elementari o ad esse riconducibili operando opportuni raccoglimenti e applicando le proprietà delle potenze.
- (e) Equazioni esponenziali risolvibili mediante un cambio di variabile.
- (f) Definizione di logaritmo. Condizione di esistenza di un logaritmo. Proprietà dei logaritmi (senza dimostrazione).
- (g) Il numero di Eulero (in Italia: numero di Nepero). Cenni sulla sua irrazionalità (teorema di Eulero, 1737) e trascendenza (teorema di Hermite, 1873) sull'insieme \mathbb{Q} . La funzione $f(x) = e^x$ e il logaritmo naturale.
- (h) Equazioni logaritmiche elementari e risolvibili applicando le proprietà dei logaritmi.
- (i) Esempi vari di equazioni esponenziali risolvibili con i logaritmi.

Lucca, 5 giugno 2024