

Liceo Scientifico “A. Vallisneri”

Programma svolto di Matematica

Classe 4B, Liceo Scientifico - A.S. 2024-2025

Prof. Alessio Del Vigna

Goniometria

- (i) Definizione di angolo e di radiante. Angoli orientati e angoli maggiori di un angolo giro.
- (ii) Definizione di seno e coseno. Proprietà di limitatezza e periodicità (con dimostrazione). Relazione fondamentale della goniometria (con dimostrazione). Definizione di tangente e cotangente e loro periodicità (con dimostrazione). Seconda relazione fondamentale della goniometria (con dimostrazione). Valori di seno, coseno e tangente degli angoli notevoli.
- (iii) Angoli associati.
- (iv) Funzioni seno, coseno e tangente: proprietà di limitatezza, periodicità e simmetria; grafico.
- (v) Funzioni goniometriche inverse: definizione delle funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente, loro proprietà e loro grafico. Invertibilità delle funzioni goniometriche in intervalli diversi da quelli canonici.
- (vi) Formule di addizione e sottrazione del seno e del coseno (con dimostrazione). Formule di duplicazione del seno e del coseno (con dimostrazione). Formule di bisezione di seno, coseno e tangente (con dimostrazione). Formule parametriche (con dimostrazione).
- (vii) Grafici di funzioni goniometriche: trasformazioni di grafici di funzioni goniometriche con dilatazioni e/o traslazioni; metodo dell'angolo aggiunto per trasformare una funzione lineare in seno e coseno in una funzione delle forma $f(x) = A \sin(kx + \varphi) + b$; utilizzo delle formule di duplicazione per trasformare una funzione di secondo grado in seno e coseno in una funzione lineare in seno e coseno.
- (viii) Equazioni goniometriche: equazioni elementari e ad esse riconducibili; equazioni lineari in seno e coseno omogenee e non omogenee con metodo grafico, metodo algebrico e metodo dell'angolo aggiunto; equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno e, per le non omogenee, il caso con il termine noto.

- (ix) Disequazioni goniometriche: disequazioni elementari e ad esse riconducibili; disequazioni lineari in seno e coseno; disequazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno; disequazioni prodotto e fratte.

Trigonometria

- (i) Teorema sui triangoli rettangoli (con dimostrazione). Teorema sul calcolo dell'area di un triangolo (con dimostrazione). Teorema della corda (con dimostrazione).
- (ii) Teoremi sui triangoli qualsiasi: teorema dei seni (con dimostrazione) e teorema del coseno (con dimostrazione).
- (iii) Problemi di trigonometria: problemi diretti; problemi che si risolvono impostando un'equazione o una disequazione; problemi di massimo e minimo.

Numeri complessi

- (i) Introduzione storica: dalla nascita dei numeri immaginari alla formalizzazione dei numeri complessi.
- (ii) Costruzione formale dell'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} come estensione di \mathbb{R} : definizione di numero complesso come scrittura simbolica $a + ib$ con $a \in \mathbb{R}$ (parte reale) e $b \in \mathbb{R}$ (parte immaginaria); definizione di somma e di prodotto in \mathbb{C} ; l'insieme \mathbb{C} con le operazioni di somma e prodotto definite è un campo (con dimostrazione).
- (iii) Verifica del fatto che $i^2 = -1$. Approccio pratico al calcolo di espressioni in \mathbb{C} : calcolo di somme, prodotti e inversi moltiplicativi. Potenze di i .
- (iv) Modulo e coniugato di un numero complesso e loro proprietà (con dimostrazione): se $z \in \mathbb{C}$ allora $|z|$ è un numero reale non negativo, ed in particolare è nullo se e solo se $z = 0$; se $z \in \mathbb{C}$ allora $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ e $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
- (v) Argomento e argomento principale di un numero complesso. Forma polare di un numero complesso. Prodotto di due numeri complessi espressi in forma polare (con dimostrazione), teorema di De Moivre (con dimostrazione).
- (vi) Radici n -esime di un numero complesso: definizione, calcolo mediante applicazione del teorema di De Moivre, interpretazione geometrica.
- (vii) Equazioni in \mathbb{C} : equazioni algebriche (polinomiali e fratte) e equazioni non algebriche.
- (viii) Polinomi a coefficienti reali: teorema fondamentale dell'algebra (senza dimostrazione); teorema della radice coniugata (con dimostrazione); fattorizzazione dei polinomi in $\mathbb{R}[x]$ come prodotto di polinomi di primo grado o polinomi di secondo grado a discriminante negativo (con dimostrazione).
- (ix) Lettura e commento del capitolo 3 del libro “Le due teste del tiranno” di Marco Malvaldi, che tratta della disfida rinascimentale intorno all'equazione di terzo grado e in particolare della figura di Gerolamo Cardano. Formula risolutiva delle equazioni di terzo grado (con dimostrazione).

Combinatoria

- (i) Cardinalità del prodotto cartesiano di insiemi finiti e principio fondamentale della combinatoria (con cenni alla dimostrazione).
- (ii) Posizione del problema tipico della combinatoria: dati n oggetti, contare quanti gruppi di k oggetti si possono formare. La questione dell'ordine degli elementi nel gruppo (sequenze *versus* insiemi) e la questione della ripetibilità degli elementi nel gruppo.
- (iii) Definizione di fattoriale di un numero intero non negativo. Coefficienti binomiali: definizione, simmetria (con dimostrazione), proprietà della pecora nera (con dimostrazione).
- (iv) Sequenze senza ripetizione e caso particolare delle permutazioni di n oggetti. Insiemi senza ripetizione.
- (v) Sequenze con ripetizione. Permutazioni con oggetti ripetuti. Insiemi con ripetizione: problema della distribuzione di oggetti indistinguibili, numero di soluzioni di equazioni della forma $x_1 + \cdots + x_k = n$ negli interi non negativi.
- (vi) Teorema del binomio di Newton per lo sviluppo di $(A + B)^n$ (con dimostrazione). Numero di sottoinsiemi di un insieme finito: dimostrazione combinatoria e dimostrazione attraverso il teorema di Newton.
- (vii) Dimostrazione di identità combinatorie mediante *double counting*.

Probabilità

- (i) Introduzione alla probabilità: definizione di spazio fondamentale come insieme degli esiti possibili di un esperimento aleatorio; definizione di evento.
- (ii) Definizione classica di probabilità, sue prime applicazioni e suo problema intrinseco.
- (iii) Definizione di probabilità su un insieme finito secondo Kolmogorov. Definizione di distribuzione di probabilità su uno spazio finito e caso particolare della distribuzione uniforme.
- (iv) Proprietà di una probabilità (con dimostrazione): probabilità del complementare, probabilità della differenza insiemistica di un evento con un suo sottoevento, probabilità dell'unione di due eventi.
- (v) Probabilità condizionata: idea intuitiva, definizione formale e dimostrazione che si tratta di una probabilità. Distribuzione di probabilità indotta da una probabilità condizionata.
- (vi) Definizione di eventi indipendenti e loro proprietà. Teorema di disintegrazione (con dimostrazione). Teorema di Bayes (con dimostrazione).

Introduzione ai limiti

- (i) L'insieme dei numeri reali: definizione come insieme di tutti gli allineamenti decimali (ripasso dalla classe prima); definizione mediante i tagli di Dedekind (ripasso dalla classe terza); definizione assiomatica. Assioma di continuità.
- (ii) Massimo e minimo di un sottoinsieme di \mathbb{R} . Estremo superiore e estremo inferiore di un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R} : definizione, esistenza (con dimostrazione) e caratterizzazione.
- (iii) Introduzione intuitiva al concetto di limite per una funzione. Retta reale estesa. Definizione di intorno di un punto della retta reale estesa (intorni di $x_0 \in \mathbb{R}$, intorni di $+\infty$ e intorni di $-\infty$). Punti di accumulazione di un sottoinsieme di \mathbb{R} .
- (iv) Funzioni elementari (potenze e loro inverse, funzione esponenziale e logaritmica, funzioni goniometriche e loro inverse): ripasso delle loro definizioni e grafici. Limiti delle funzioni elementari nei punti di accumulazione del loro dominio e che non vi appartengono.
- (v) Definizione di funzione continua in un punto e suo significato. Continuità delle funzioni elementari (senza dimostrazione). Continuità delle funzioni ottenute da funzioni continue mediante operazioni algebriche (senza dimostrazione). Continuità della composizione di due funzioni continue (senza dimostrazione).
- (vi) Teorema algebrico (senza dimostrazione) e casi non coperti.
- (vii) Calcolo dei limiti: utilizzo della continuità, dei limiti delle funzioni elementari e del teorema algebrico.